第二单元　极限

一、本单元的内容要点

1.数列的极限的定义，极限的证明方法；

2.函数的极限，极限的证明方法；

3,左右极限，极限存在的判定准则；

4.极限的几何意义；

5.函数极限的性质.

二、本单元的教学要求

1.理解数列极限的定义；

2.掌握证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的基本方法；

3.理解函数极限的定义，与数列极限的差别；

4.掌握证明 $\lim_{x\to a} f(x) = a, \lim_{x\to\infty} f(x) = a$ 的基本方法；

5.掌握极限的基本性质，并加一简单应用.

三、本单元教学的重点与难点

重点：

1.极限的分析定义；

2.极限的几何意义；

3.证明极限存在的基本方法及说明极限不存在的方法；

4.左右极限及应用；

5.极限的性质及应用.

难点：

1.极限的分析定义中ε的任意性及**n(**数列**)**、δ**(**函数**)**与ε的关系；

2.证明极限存在的方法；

3.极限存在的几何描述；

4.极限的性质几证明.

教学时数　**4**课时.

数列的极限

1.数列

定义　正整数集N^*上的函数称为数列.

由定义，对每个正整数 n ，数列都确定了一个相应的实数x_n，这些x_n可按下标从小到大依次排成一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, \qquad (1)$$

记为$(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

数列中的第n个数又称为数列的第n项，又叫作一般项.

例1 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,$ 一般项 $x_n = \frac{1}{n}$;

例2 $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots,$ 一般项 $x_n = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

例3 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots,$ 一般项 $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

例4 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots,$ 一般项 $x_n = (-1)^{n-1}$.

2.极限的描述

在上面的这些例中，我们发现例1、2、3都有明确的变化趋势．例1中，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$；例2中 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$；例3中 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$．而例4中的数列却没有明确的变化趋势．

上面仅仅是通过观察的方法得到数列的极限．如何用定量化的数学方法来刻画数列的极限？从本质上看，数列的极限反映了数列当n趋于无穷大时，数列中的项和某一个定数充分接近．

我们知道：两个数***a*** 和***b*** 的接近程度可用两数差的绝对值来刻画.

对数列 $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$，$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$，故只要***n***充分大，$|x_n - 1|$ 就充分小. 例如要使

$$|x_n - 1| < \frac{1}{10^2}$$

只要***n*>100**即可. 即从第**101**项开始的以后所有项都满足这一要求；

再如，要使

$$\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{10^4}$$

只要$n > 10000$即可．即从第**10001**项开始的以后所有项都满足这一要求.

一般：要使

$$\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{10^k}$$

只要$n > 10^k$即可．即从第(10^k+1)项开始的以后所有项都满足这一要求.

对上面例的分析，可以看到，无论一个正数取得多么小，总可以找到自然数n，在这项以后的所有项与1的距离都可以小于该数．数学上用ε来表示一个任意小的正数．由此得到极限的精确定义：

3.极限的定义

定义 设数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ，如果存在常数***a***，使得对任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在自然数***N***，只要***N>n***，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么称常数***a***是数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限，，或则称数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于***a***，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或则

$$x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

如果这样的常数$\boldsymbol{a}$不存在，就说数列没有极限，或称数列是发散的.

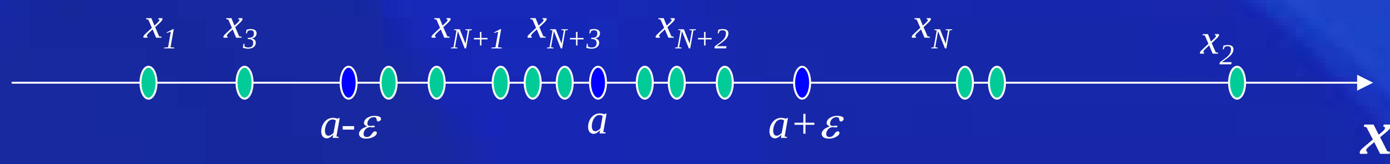
注　定义中的正数ε是一个任意小的数，不能把它和一个很小的数混为一谈.

注　定义中的自然数N，实际上是某一项的序号，$n>N$，

表示自该项以后的所有项.

4.数列极限的几何意义

设数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$，则由定义，对任意给定的正数 ε，一定存在正整数 $\boldsymbol{N}$，当 $\boldsymbol{n>N}$ 时，所有的 $\boldsymbol{x_n}$ 都落在一个以 $\boldsymbol{a}$ 为中心，ε 为半径的空心邻域中.



数列极限的定义实际上也给出了证明极限的方法：即对给定的任意正数ε，去寻找满足不等式的N．寻找办法是从 $|x_n-a|$ 经过不等式的变形，逐步解出N．

例1 证明数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 的极限是1.

证 记 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，$a=1$，$\forall\varepsilon>0$

要使 $|x_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，

令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$ ■

例2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$.

证　$\forall\varepsilon>0$

$$|x_n-a|=\left|\frac{2n+1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n+3-6n-4}{3(3n+2)}\right|,$$

$$=\frac{1}{3(3n+2)}<\frac{1}{(3n+2)}<\frac{1}{n}$$

令 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ ，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|=\left|\frac{2n+1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

所以：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}.$$

■

例3　证明　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=0$.

证　$\forall\varepsilon>\mathbf{0}$

$$\because\quad |x_n-a|=\left|\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right|=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$<\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{2}{n},$$

$\therefore$ 令 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $\boldsymbol{n>N}$ 时，有

$$|x_n-a|=\left|\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right|<\frac{2}{n}<\varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=0.$$

$\blacksquare$

收敛数列的性质

定理1(极限的唯一性**)** 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

证 用反证法．假设同时有 $x_n \to a$, $x_n \to b$, 且$a<b$, 取

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2},$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，故存在正整数$N_1$，当$n>N_1$时，有

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \qquad (2)$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，故存在正整数$N_2$，当$n>N_2$时，有

$$\left|x_n - b\right| < \frac{b-a}{2}, \qquad (3)$$

取$N=max\{N_1, N_2\}$, 当n>N时，上两式都成立，由(2)得；

$x_n < \frac{a+b}{2}$, 由(3)得：$x_n > \frac{a+b}{2}$，而这是不可能的，由此得到：$a=b$.

■

数列的有界性

对于数列$\{x_n\}$，若存在正数M，使得对于一切的x_n，都有$|x_n|\le M$，则称数列$\{x_n\}$是有界的.

例　数列$x_n=\dfrac{1}{n+1}$是有界的，因此时取$M=1$即可.

例　数列$x_n=2^n$则是一个无界数列.

定理2(收敛数列的有界性)　如果数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$一定有界.

证　因数列$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由极限的定义，对$\varepsilon=1$，$\exists$正整数$N$，当$n>N$时，有

$$|x_n - a| < 1,$$

从而当$n>N$时，有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| \le 1 + |a|,$$

取　$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_N|, 1 + |a|\},$$

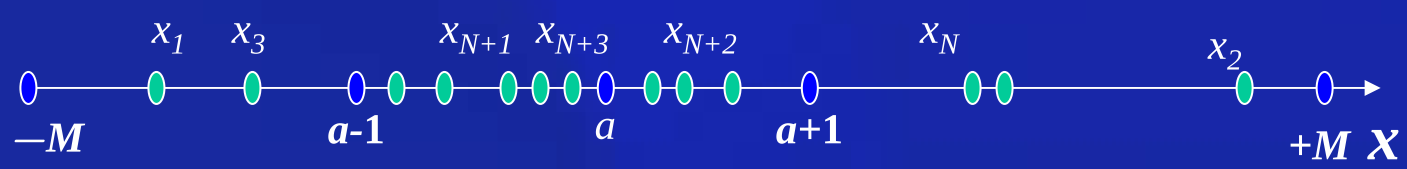
则数列$\{x_n\}$中的一切x_n，都有

$$|x_n| \le M,$$

故数列$\{x_n\}$是有界的.

$\blacksquare$

收敛数列有界性的几何意义：



定理3(收敛数列的保号性)　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$且 $a > 0$,则存在正整数N>0，当n>N时，有x_n>0.

证　因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，由数列极限的定义，对$\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$

∃正整数N>0, 当n>N时，有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0.$$

■

注　**1.**若将定理3中的$a > 0$改为$a < 0$，则有平行的结论.

2.作为定理3的一个重要应用，我们有

推论　如果数列$\{x_n\}$自某项起有$x_n \geq 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \geq 0$.

在$\{x_n\}$中任意抽取无限多项，并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，如此得到的数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

数列$\{x_n\}$的子列一般记为$\{x_{n_k}\}$, 即

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots.$$

例　设数列$\{x_n\}$，则由奇数项和偶数项构成的子列分别记为$\{x_{2n-1}\}$、$\{x_{2n}\}$.

定理4(收敛数列与其子列的关系)　如果数列$\{x_n\}$收敛于a，则它的任一子列也收敛，且极限也是a.

函数的极限

函数极限的定义

数列$\{x_n\}$可看成是自变量为n的函数：$x_n= f(n), n\in N^*$.

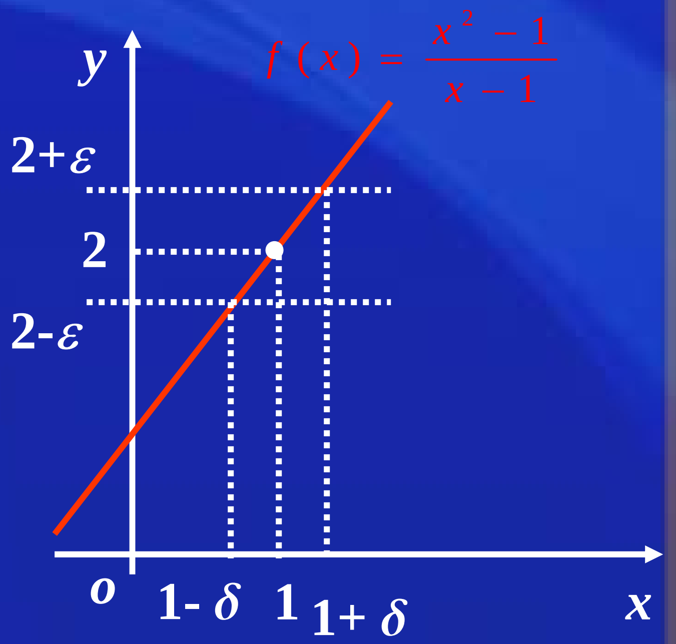
所以数列$\{x_n\}$的极限为a: 就是当自变量取正整数而趋于无限大(即$n\to\infty$)时，对应的函数值$f(n)$无限接近于某一个确定的数a．把离散变量n换成连续变量x，就得到函数的极限，所不同的是，连续变量x有两种变化趋势：定值x_0及无穷大∞ .

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

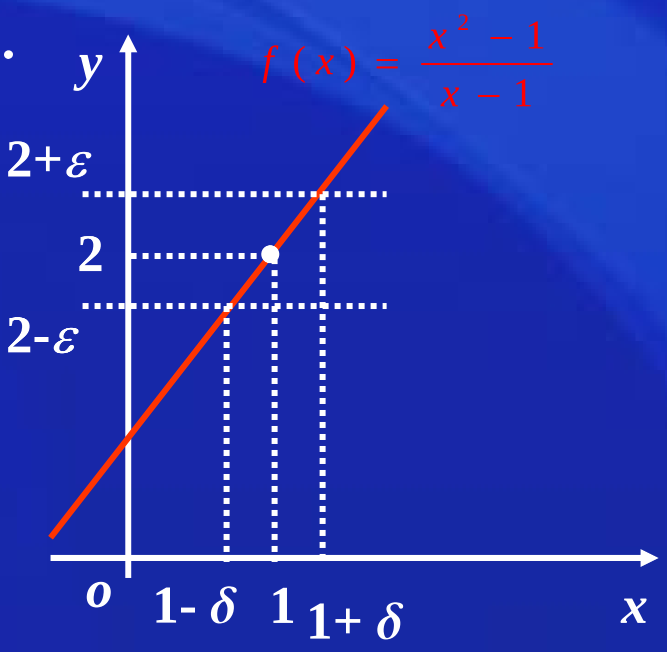
引例　设函数

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

从图形中可以看出：尽管函数在点$x=1$处没有定义，但当x趋近于1而不等于1时，相应的曲线上的点趋进于直线$y=2$. 更进一步的可以看到，对于y



轴上的任何一个以2为中心，ε为半径的邻域，在x轴上都可以找到一个相应的以1为中心、δ为半径的空心邻域，在该邻域中的点所对应的图形上的点都落在$y=2-\varepsilon$、$y=2+\varepsilon$的带形区域中.



抽去函数$f(x)$的具体表达式即得到函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限的定义.

定义　设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域中有定义，如果存在常数A，使得对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，对于满足$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数A就称作函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

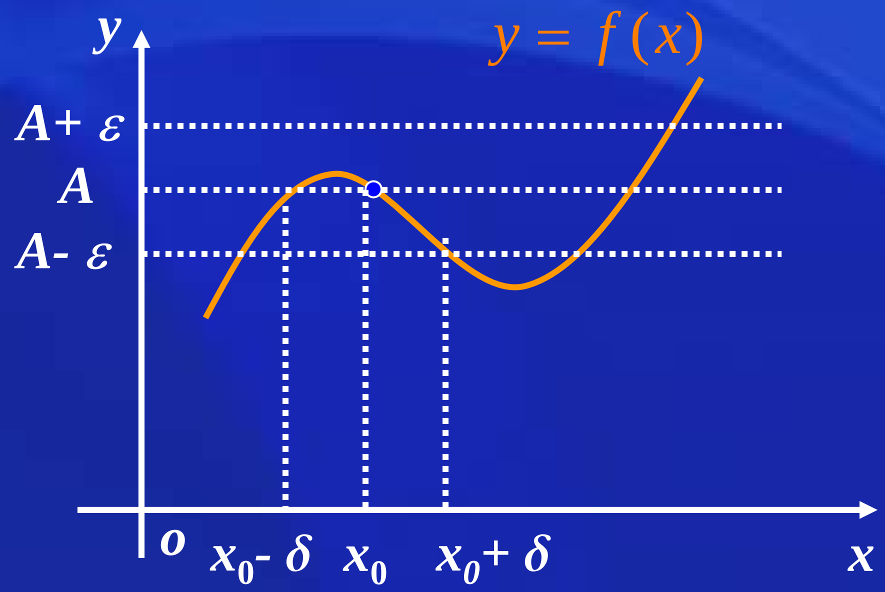
值得注意的是，在极限的定义中，关系 $0<|x-x_0|<\varepsilon$ 表示$x\neq x_0$，所以函数$f(x)$在点x_0处的极限存在与否，与函数$f(x)$在点x_0处是否有定义无关.

函数 $f(x)$在点x_0处的极限定义可以简单地表达为：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时，有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数$f(x)$ 在点 x_0 处的极限的几何意义.



例1 证明下列极限

(1) $\lim\limits_{x \to 2}(2x+1)=5$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\sin x=0$.

证 (1) $\because \ |f(x)-A|=|2x+1-5|=|2x-4|=2|x-2|$

$\therefore \ \forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<|x-2|<\delta$, 有

$$|f(x)-A|=|2x+1-5|=2|x-2|<\varepsilon$$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to 2}(2x+1)=5.$

(2) $\because$ $|f(x)-A| = |\sin x - 0| = |\sin x|$

欲使 $|\sin x| < \varepsilon$ 即 $-\varepsilon < \sin x < \varepsilon$

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$ 不妨取 $0 < \varepsilon < 1,$

此时令 $\delta = \arcsin \varepsilon$，当 $0 < |x| < \delta$

即有 $|f(x)-A| = |\sin x - 0| < \varepsilon$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0.$

例2　证明 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1-4x^2}{2x+1} = 2$

证 $\because$ $|f(x)-A| = \left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1} - 2\right| = \left|\dfrac{(2x+1)^2}{2x+1}\right| = 2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$,　取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < \left|x - (-\dfrac{1}{2})\right| < \delta$, 有

$$|f(x)-A| = \left|\frac{1-4x^2}{2x+1} - 2\right| = 2\left|x+\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2.$$

■

例3　证明 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

证 $\because$ $|f(x)-A| = |x^2-4| = |x+2||x-2|$

为能解出不等式 ***M* | x-2|**，要对 ***x*** 进行适当的控制，为此限定 ***x*** 的变化范围是 **1< *x* <3**，所以 **| *x*+2 |<5**

$\therefore \forall \varepsilon > 0,$　取 $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\}$,当 $0 < |x-2| < \delta$, 有

$$|f(x)-A| = |x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < \varepsilon$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$ ■

通过上面的几个例子，我们得到证明极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

的一般方法：考虑$|f(x)-A|$，经过不等式的变形得到关系 $|f(x)-A|<M|x-x_0|$, 对任意正数ε，取 $\delta=\varepsilon/M$.

例**4**　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}.$

证　$\because\ \left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2+2}{x+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{\left|2x-1\right|}{\left|2(x+1)\right|}\left|x-1\right|$

取 $\delta_1=1$，即 $0<x<2$, 所以 $\left|\dfrac{2x-1}{2x+2}\right|<1$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,$　取 $\delta=\min\{1,\ \varepsilon\}$,当 $0<\left|x-1\right|<\delta$, 有

$$\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^2+2}{x+1}-\frac{3}{2}\right|<\left|x-1\right|<\varepsilon$$

$\therefore$ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$ ■

例5 设 $x_0>0$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 $\because$ $$\left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{1}{\sqrt{x_0}}\left|x-x_0\right|$$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\varepsilon\}$, 当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, 有

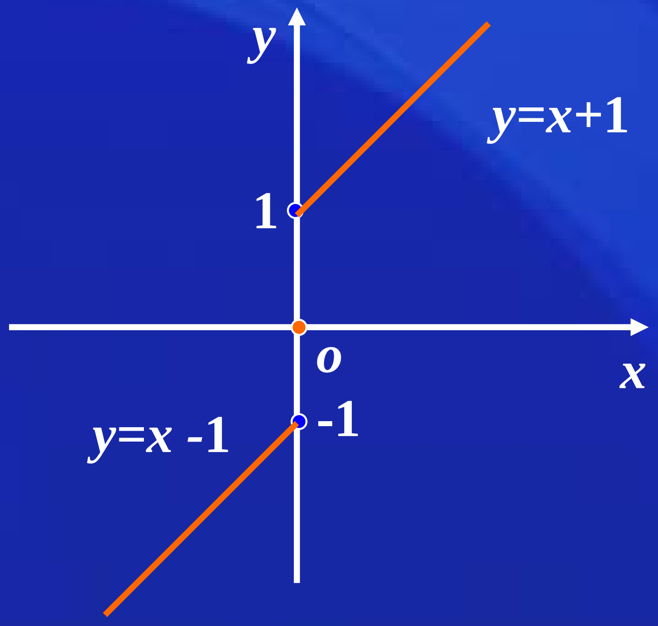
$$\left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\frac{1}{\sqrt{x_0}}\left|x-x_0\right|<\varepsilon$$

$\therefore$ $$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$ ■

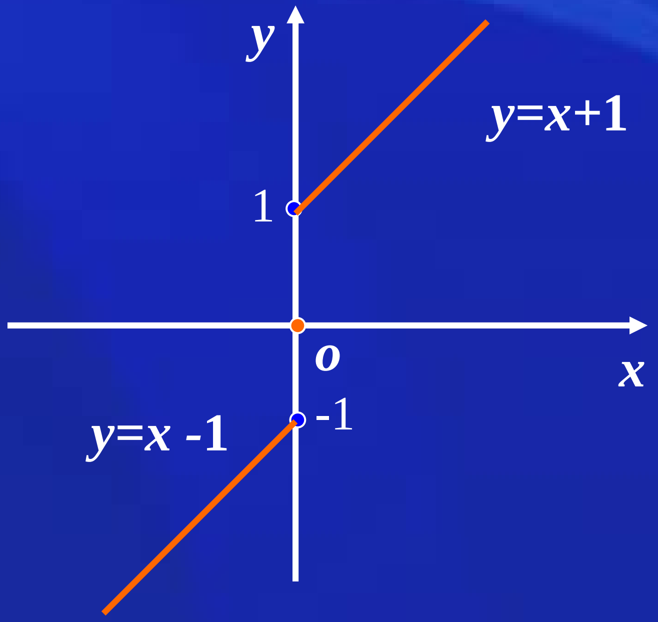
左右极限

前面讨论的是函数 $f(x)$在某一点x_0的极限，它反映的是当 x 在该点两侧趋近于x_0 时，函数有一个确定的变化趋势，但某种情况下，函数在两侧的趋势是不同的，这就需要分别加以讨论．考虑函数：

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$$



该函数在点$x=0$两侧的变化趋势是不同的：当x在0的右侧趋近于0时，$f(x) \to 1$；而当x在0的左侧趋近于0时，$f(x) \to -1$．这就导出左右极限的概念．



定义　设函数 $f(x)$在 x_0 的某个左(右)邻域内有定义，如果果存在常数A，使得对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，只要 x 满足

$$0 < x_0 - x < \delta$$

$$(0 < x - x_0 < \delta)$$

对应的函数值 $f(x)$就满足

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

那么常数A就称作函数$f(x)$在x_0处的左(右)极限.

左极限记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 或 $f(x_0-0)$,

右极限记为 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 或 $f(x_0+0)$.

容易验证:

定理 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\boldsymbol{f(x)}$ 在点 $\boldsymbol{x_0}$ 处的左右极限存在并且相等.

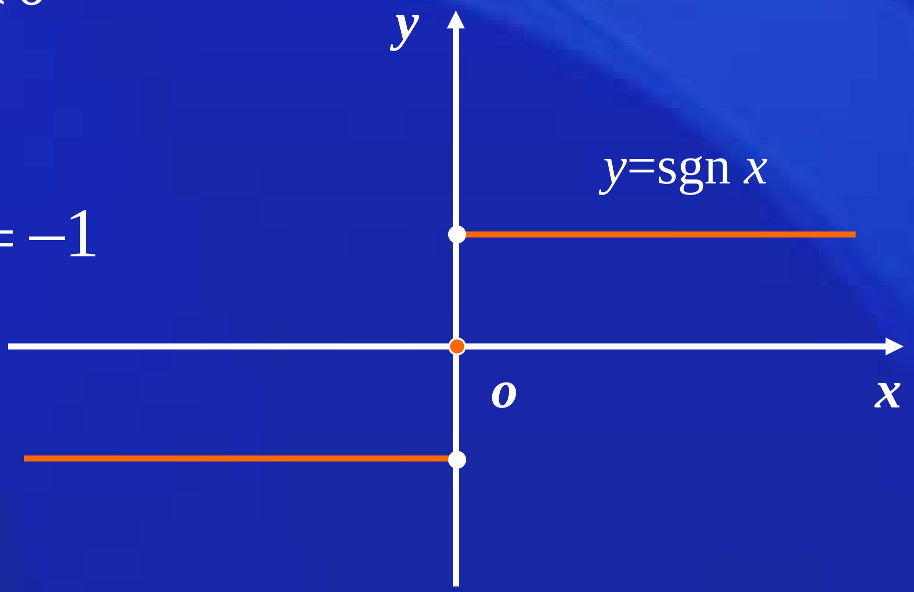
例**6**　符号函数 ***y* =sgnx**：

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} (-1) = -1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在 .



2.函数在无穷大处的极限

定义　设函数 $f(x)$ 当 $|x|>M$ 时有定义，如果存在常数 A 使得对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，只要 x 满足 $|x|>X$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

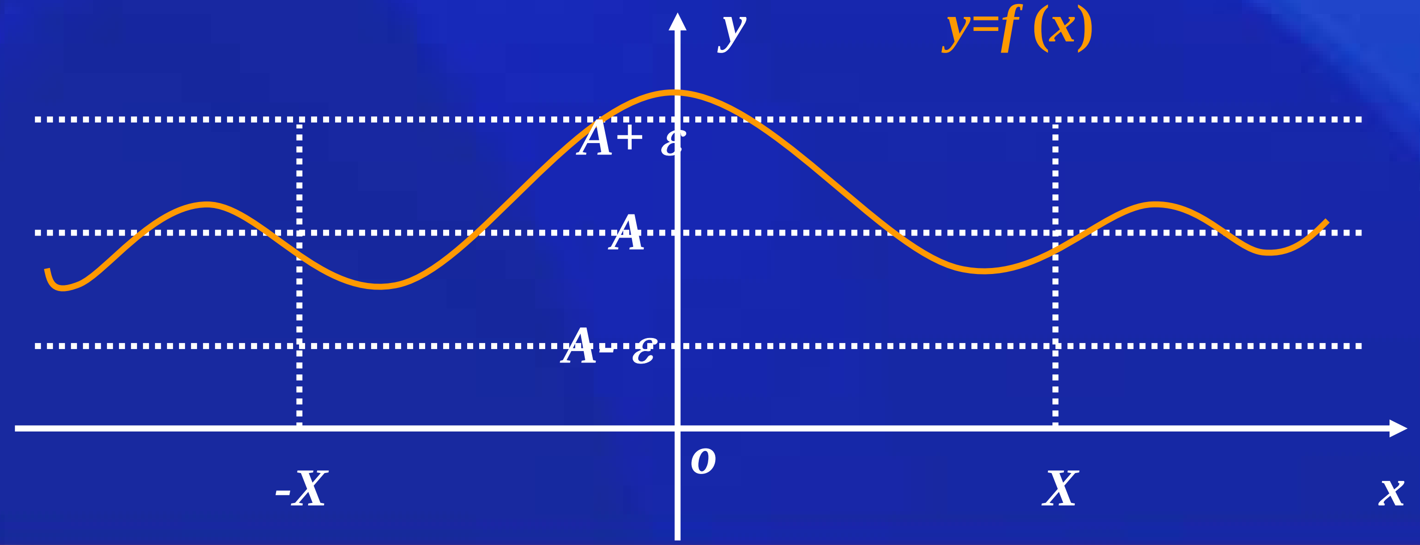
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

函数 **f(x)**在点∞处的极限定义可以简单地表达为:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0,\ \text{当}|x|>X\text{时有}$$

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

函数在无穷大处的极限的几何意义



单侧极限：

将上述定义中**x** 的取值范围限定在一侧，就得到单侧极限的定义，分别记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 和 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

定理 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \wedge \lim_{x\to+\infty} f(x) = A\right).$

例7　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=0.$

证　$\because\ \left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\le\dfrac{2}{|x|}$

$\therefore\quad \forall\varepsilon>0,$　取 $X=\dfrac{2}{\varepsilon}$，当 $|x|>X$，有

$$\left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right|<\varepsilon$$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=0.$

函数极限的性质

由于数列极限可以看作是函数极限的一个特殊形式，故数列极限中的许多性质可以平行地搬到函数极限的性质中.

定理1(极限的唯一性) 如果极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x)(\lim_{x \to \infty} f(x), \lim_{n \to \infty} x_n)$$

存在，则极限是唯一的.

定理2(局部有界性)　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么在 x_0的某个空心邻域内，函数$f(x)$有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，由定义，对$\varepsilon=1$，存在$\delta>0$, 当 $x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$,

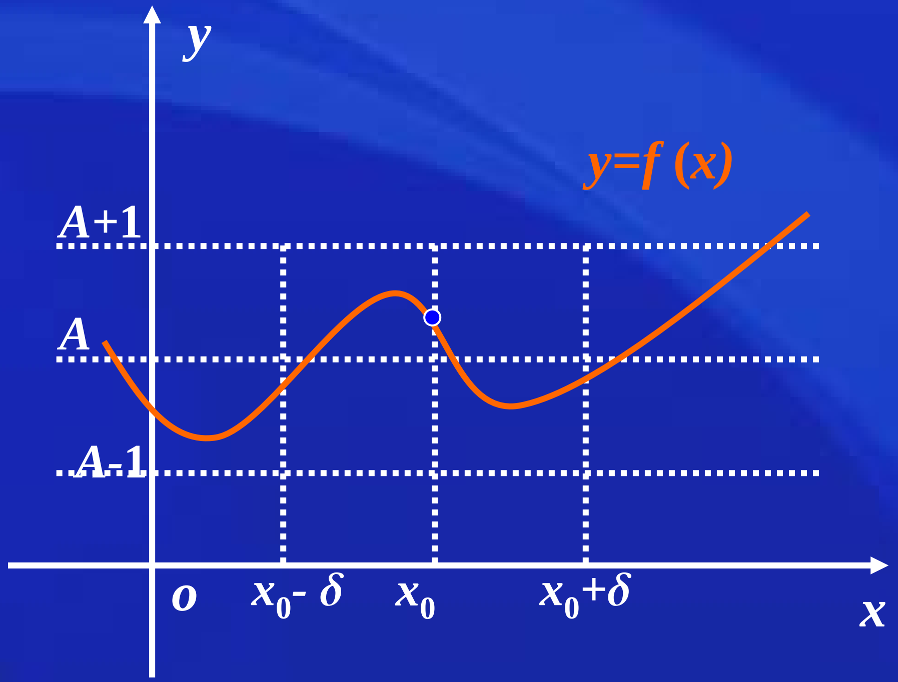
$$|f(x)-A|<1,$$

$$\therefore \quad |f(x)|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

即，$f(x)$在x_0的某个空心邻域内有界.

■

局部有界的几何意义



定理2′(局部有界性) 如果极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，那么存在$X>0$，当$|x|>X$，函数$f(x)$有界.

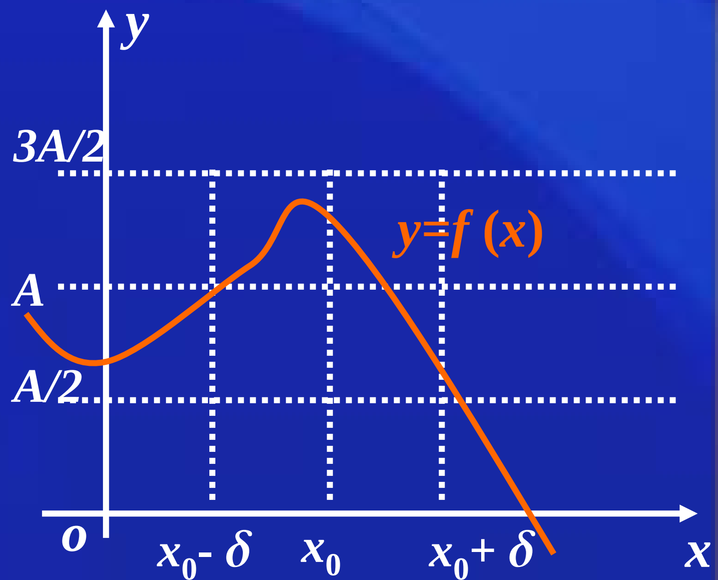
定理3(极限的保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$，则在点 x_0 的某个空心邻域内，使函数 $f(x)>0$.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，由定义，对 $\varepsilon = A/2$，存在 $\delta>0$，当 $x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$ 时，有

$$f(x) > A - \varepsilon = \frac{A}{2} > 0.$$

■

右图说明保号性的几何意义.



定理**4**(函数极限的归并性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，又设 $\{x_n\}$是函数$f(x)$定义域中的一个任意数列: $x_n \neq x_0$， 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

则相应的函数数列$\{f(x_n)\}$收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在$\overset{o}{U}(x_0,\delta)$, 当$x \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,$ 故存在N，当$n>N$时，有$x_n \in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$,

因而 $$\left|f(x_n)-A\right|<\varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

■

此定理的一个实际意义是：对函数$\boldsymbol{f(x)}$，如果能够找到两个不同的子列，是函数收敛到两个不同的值，则说明函数在这一点无极限.

例8 证明函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处极限不存在.

证 令

$$x_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}},\ y_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to}y_n=0, \wedge x_n\neq 0\neq y_n,$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1, \lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=0,$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在. ■