第三单元

极限运算法则

一、本单元的内容要点

1.无穷小与无穷大的概念；

2.极限的运算法则；

3.两个重要极限

4.无穷小的阶与等价无穷小及等价无穷小的替换准则.

二、本单元的教学要求

1.理解无穷小和无穷大的概念；

2.掌握极限的运算法则

3.掌握两个重要极限并由此去计算比较复杂的极限；

4.理解无穷小阶的概念，熟记几个常用的等价无穷小并由此去求一些复杂的极限.

三、本单元教学的重点与难点

重点

1.无穷小的概念，无穷小与极限的关系；

2.极限的运算法则，尤其是复合函数极限的运算法则；

3.两个重要极限；

4.无穷小的阶与等价无穷小的替换.

难点

1.要区别无穷小与“很小”的数的差别，注意到无穷小是一类以零为极限的变量；

2.注意无穷大与无界函数的差别．无穷大并不是极限，但却有明显的变化趋势，为了指出这类特殊的变化形式才引入了无穷大的概念；

3.理解无穷小的阶的概念及本质，掌握用等价无穷小替换方法去求某些复杂极限的方法，尤其是使用等价无穷小替换的条件.

本单元教学时数：6课时

无穷小与无穷大

1.无穷小

定义　如果$x\to x_0(x\to\infty)$时函数$f(x)$的极限为零，那么函数 $f(x)$就叫做$x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小.

注 **1.**无穷小是以零为极限的变量，不能把它混同于一个很小的数；

2.变量是否为无穷小与自变量的变化过程有关.

例1　因 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以变量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是当$x\to 0$时的无穷小量.

定理1　在自变量的同一变化过程$x\to x_0(x\to\infty)$中，函数$f(x)$有极限A的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

证　$\Rightarrow$：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$

令$\alpha = f(x) - A$，则，上式为

$$|f(x) - A| = |f(x) - A - 0| = |\alpha - 0| < \varepsilon,$$

即，变量α是无穷小量；

$\Leftarrow$：若$\alpha = f(x) - A$是当$x \to x_0$时的无穷小，则$\forall\ \varepsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$$|\alpha - 0| = |f(x) - A - 0| = |f(x) - 0| < \varepsilon,$$

即：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

同理可讨论 $x \to \infty$的情形.

2.无穷大

定义2　设函数 $f(x)$在x_0的某一个空心领域中有定义(或$|x|$大于某一个正数)，若对于任意给定的正数M，总存在正数δ(或正数X)，只要x适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$($|x|>X$)，对应的函数值 $f(x)$总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$为当$x\to x_0$($x\to\infty$)时的无穷大．记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

注　1.记号 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 并不是表明函数$f(x)$当$x\to x_0$ $(x\to\infty)$时极限存在，而仅是为了表明函数$f(x)$当自变量在变化的过程中，有确定的变化趋势；

2.无穷大(∞)不是一个数.

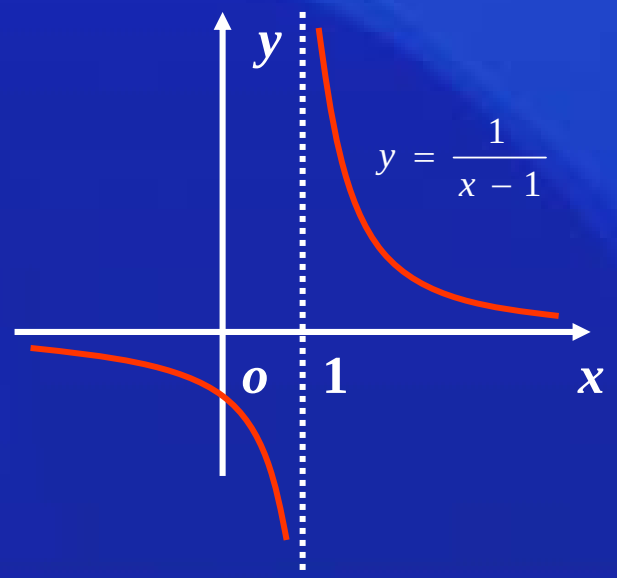
例2　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时为无穷大.

证　$\forall M>0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，即 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$，故取 $\delta=\dfrac{1}{M}$

当 $0<|x-x_0|<\delta=\dfrac{1}{M}$，有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$

即：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



定理2　在自变量的某一个变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\forall\varepsilon>0$，由无穷大的定义，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon}=M,$$

即，

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

即，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

反之，设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则由无穷小的定义，对 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$

$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

因当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{M},$$

即，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0.$

类似，可证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ 的情形.

极限运算法则

利用函数极限与无穷小的关系(定理1)，我们导出如下的极限运算法则．为了简化起见，我们以记号 $\lim\limits_{x} f(x)$ 表示当自变量在某一个变化过程中的极限，这里变量 x可以$x\to x_0$, 也可以$x\to\infty$．在相关的证明过程中，只要把$0<|x-x_0|<\delta$改换成相应的$|x|>X$即可．

定理3　有限个无穷小的和是无穷小.

证　考虑两个无穷小的情形.

设当$x\to x_0$时，α,β是无穷小，考虑变量$\gamma=\alpha+\beta$，由条件$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},$$

同理，因$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$，对对此$\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，有

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|\gamma| = |\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即，$\lim\limits_{x \to x_0} \gamma = 0.$

定理4　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数u在x_0的某一个空心领域$\overset{o}{U}(x_0,\delta_1)$内是有界的，即$\exists M>0$，使得对一切的$x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta_1)$　有$|u|\le M$，又设α是当$x\to x_0$时的无穷小量，即$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，有

$$|\alpha|\le\frac{\varepsilon}{M},$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|u|\le M,|\alpha|\le\frac{\varepsilon}{M},$$

同时成立，从而

$$|u\alpha| = |u||\alpha| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

即，$u\alpha$是$x \to x_0$的无穷小.

推论1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理5 如果 $\lim\limits_{x} f(x)=A, \lim\limits_{x} g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x} f(x)\pm\lim\limits_{x} g(x)=A\pm B.$

(2) $\lim\limits_{x}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x} f(x)\cdot\lim\limits_{x} g(x)=AB.$

(3)若$B\neq 0$，则

$$\lim_{x}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x} f(x)}{\lim\limits_{x} g(x)}=\frac{A}{B}.$$

证 (1)设 $\lim\limits_{x} f(x)=A, \lim\limits_{x} g(x)=B$, 则由定理**1**，有

$$f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta,$$

其中，α, β均为无穷小，于是

$$f(x)\pm g(x)=A+\alpha\pm B+\beta=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta),$$

这里，$\alpha\pm\beta$是无穷小，所以由定理**1**，得

$$\lim_{x}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B=\lim_{x} f(x)\pm\lim_{x} g(x).$$

(2)因 $\lim\limits_{x} f(x)=A, \lim\limits_{x} g(x)=B$ ，故在x_0的某个空心领域$\overset{o}{U}(x_0,\delta_1)$内，函数$f(x)$, $g(x)$有界，又因

$$\lim_{x} f(x) = A, \lim_{x} g(x) = B$$

故 $f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta$, 从而在$\boldsymbol{x_0}$的某个领域 $\overset{o}{U}(x_0, \delta)$ 内有

$$f(x)g(x) = [A + \alpha] \cdot [B + \beta]$$

$$= A \cdot B + f(x) \cdot \beta + g(x)\beta + \alpha\beta$$

注意到，在该领域中， $\boldsymbol{f(x), g(x)}$为有界变量，故

$$f(x) \cdot \alpha + g(x) \cdot \beta + \alpha\beta$$

为无穷小，所以由定理**3**，得

$$\lim_{x} [f(x)g(x)] = AB = \lim_{x} f(x) \cdot \lim_{x} g(x).$$

(3)因 $\lim\limits_{x} f(x)=A, \lim\limits_{x} g(x)=B\neq 0$, 则由定理**1**，得

$$f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta,$$

其中，α, β为无穷小，令

$$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B},$$

则

$$\gamma=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha-A\beta),$$

因 $\lim\limits_{x} g(x)=B\neq$故由第二单元第四目的定理**3**，存在点 x_0的某一个空心领域 $\overset{o}{U}(x_0)$，当 $x\in\overset{o}{U}(x_0)$时，有

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2},$$

$$\therefore \quad \left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right| = \left|\frac{1}{B}\right| \cdot \left|\frac{1}{g(x)}\right| < \left|\frac{1}{B}\right| \cdot \frac{2}{|B|} = \frac{1}{|B|^2},$$

由此说明，$\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 在点x_0的某个空心领域 $\overset{o}{U}(x_0)$ 中有界， 由本节定理2，知γ为无穷小．又因

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + \gamma,$$

故由定理1，得

$$\lim_{x}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x}f(x)}{\lim\limits_{x}g(x)}.$$

由此定理得如下推论：

推论1 若 $\lim\limits_{x}f(x)$存在，c为常数，则

$$\lim_{x}cf(x)=c\lim_{x}f(x).$$

推论2 若 $\lim\limits_{x}f(x)$存在，n是正整数，则

$$\lim_{x}\left[f(x)\right]^{n}=\left[\lim_{x}f(x)\right]^{n}.$$

将数列视为特殊的函数，由此得到：

定理6 设有数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$，若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

则，

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b,$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = ab,$

(3)若$y_0 \neq 0$, 且$b \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}.$

定理7　若$\varphi(x) \geq \phi(x)$, 而$\lim\limits_{x} \varphi(x) = a, \lim\limits_{x} \phi(x) = b$, 则 $a \geq b$.

例1　求$\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 + 3x - 2\right)$.

解　$$\lim_{x \to 2}\left(x^2 + 3x - 2\right) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 3x - \lim_{x \to 2} 2$$

$$= \left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 + 3\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 2 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 8.$$

一般，对多项式函数 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, 有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0).$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+1}{3x^3+2x^2-x+1}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3+2x^2-x+1\right)=5\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1}{3x^3+2x^2-x+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3+2x^2-x+1\right)}=\frac{4}{5}.$$

一般，若

$$f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}=\frac{P_n(x)}{P_m(x)},P_m(x_0)\neq 0,$$

则，

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{P_n(x_0)}{P_m\left(x_0\right)}.$$

例3　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

解　当$x\to 1$时，分子和分母的极限为零，故不能用上面的方法求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2.$$

例4　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+4\right)=0, \lim\limits_{x\to 1}\left(2x-3\right)\neq 0$, 故不能商的求极限的方法．考虑

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=0,$$

由无穷大与无穷小的关系，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

例5　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-2x+1}{3x^3-x^2+2x-3}$.

解　分子分母均除以x^3, 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-2x+1}{3x^3-x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

例6　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x+1}$.

解　分子分母均除以x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-2x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-2\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=0.$$

例7　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2x-1}{3x^3+2x^2+4}$.

解　考虑极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+4}{x^4-3x^2+2x-1},$$

同例6，得该极限为0，故原式的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2x-1}{3x^3+2x^2+4}=\infty.$$

对上面几个例子的分析，得到有理函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限公式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ 0 & n>m\,.\\ \infty & n<m\end{cases}$$

定理6(复合函数极限的运算法则)　设函数 $y=f[g(x)]$是由函数$f(u)$与函数$u=g(x)$复合函数，$y=f[g(x)]$在点x_0的某空心领域内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且存在$\delta_0>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_0$时，有$g(x)\neq g(x_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

证　由函数极限的定义，因

$$\lim_{u\to u_0} f(u)=A,$$

故，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当$0<|u-u_0|<\eta$，有

$$|f(u)-A|<\varepsilon,$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，故对此$\eta>0$, $\exists\delta_1>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_1$, 有$|g(x)-g(x_0)|<\eta$, 又由假设，当$0<|x-x_0|<\delta_1$，有$g(x)\neq u_0$，取$\delta=\max\{\delta_1, \delta_2\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有

$$0<|g(x)-u_0|<\eta,$$

从而，有

$$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon,$$

即，

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

例8　求$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x+1}$.

解　令$u=2x+1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}u=3$，而当$u_0>0$时，$\lim\limits_{u\to u_0}\sqrt{u}=\sqrt{u_0}$，

故由定理6，得：

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x+1}.$$

极限存在准则

在这一目中，我们主要讨论极限存在的两个重要准则，及利用这两个准则所得到的两个重要极限.

准则1　如果数列(x_n), (y_n), (z_n)满足下列条件：

(1) $y_n \le x_n \le z_n (n=1,2,3,\cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则数列(x_n)的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证　因$x_n \to a$, $y_n \to a$, 由数列极限的定义，$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 > 0$, 当$n > N_1$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$, 对此$\varepsilon > 0$, $\exists N_2 > 0$, 当$n > N_2$时，有$|z_n - a| < \varepsilon$，取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时 关系式

$$|y_n - a| < \varepsilon, |z_n - a| < \varepsilon,$$

同时成立，即有

$$a-\varepsilon < y_n < x_n < z_n < a+\varepsilon,$$

即

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

此即说明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

准则1的函数形式为

准则 1′　如果

(1)当 $x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$ (或|x|>M)时，

$$g(x) \le f(x) \le h(x),$$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A \left(\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = A \right),$

则: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \right).$

重要极限1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证　首先注意到函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 对一切$x\neq 0$都有定义，并且为偶函数，故仅需证明对$x>0$时关系成立即可.

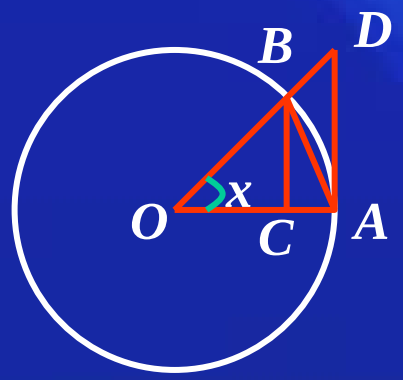
如图所示，在单位圆中，记圆心角

$$\angle AOB = x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

点A处的切线与OB的连长线交于D，

BC⊥OA，则

$$\sin x = CB,\ x = \overset{\frown}{AB},\ \tan x = AD,$$



∵ **ΔAOB的面积<扇形AOB< ΔAOD的面积，**

∴ $$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即， $$\sin x < x < \tan x,$$

不等式两边都除以 **sin*x***，得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

变形为

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，由准则1，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

∵当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有不等式

$$0<|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2},$$

即：

$$0<1-\cos x<\frac{x^2}{2},$$

当$x\to 0$时，$\dfrac{x^2}{2}\to 0$，由准则 $1'$ 得

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

例9　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

例10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\cdot x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

例11　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　令t=arc sin$x$, 则x=sin t, 当$x\to 0$时，$t\to 0$, 则由复合函数的极限运算法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

准则2　单调有界数列必有极限.

作为这个准则的应用，我们来讨论极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

设$x_n=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}$，今证数列$(x_n)$单调增加且有界.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

类似地有

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较x_n, x_{n+1}的展开式，可以看到除前两项外， x_n的每一项都小于x_{n+1}的每一项，且还多了最后的一项，其值

大于零，所以

$$x_n < x_{n+1},$$

由此说明数列(x_n)是单调增加上升的．又因

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

此说明数列(x_n)是有界的，由极限存在准则2，知数列

(x_n)的极限存在，以数e表示，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

可以证明，当$x\to+\infty$, $x\to-\infty$时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的极限均存在，且都等于e，即有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

例12　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-n}\right]^{-1}=e^{-1}.$$

例13　求

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\Big/\left(1+\frac{2}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{2}=e^{2}.$$

此例说明，对于任何整数k，总有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+k}=e.$$

例14　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^{4}=e^{4}.$$

无穷小的比较

在本节的第一目中，我们看到有限个无穷小的和、积仍然是无穷小，但无穷小的商却会出现多种情况．例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\quad \lim_{x\to}\frac{3x}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

可以看到，当$x\to 0$时，$x^2\to 0$比$x\to 0$的速度更快；而$\sin x\to 0$与$x\to 0$的速度大致相同．在这个过程中，可以看到“阶”起了一个比较重要的作用．为此，我们引入：

定义：设α, β是两个无穷小，

(1)若$\lim\limits_{x}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, 则称α是β的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$

(2)若 $\lim\limits_{x}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, 则称α是β的低阶无穷小；

(3)若 $\lim\limits_{x}\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$, 则称α是β的同阶无穷小；

(4)若$\lim\limits_{x}\dfrac{\alpha}{\beta^{k}}=0$, 则称α是β的$k$阶无穷小；

(5)若$\lim\limits_{x}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, 则称α是β的等价无穷小，记作$\alpha=\sim\beta$.

由前面的例中可以看到：$x \sim \tan x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$

例15 证明：当$x\to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x.$

证 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^n-1}{\frac{1}{n}x\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}=1.$$

定理1 α, β是等价无穷小的充分必要条件为$\alpha=\beta+o(\beta)$.

证 $\Rightarrow$：设 $\alpha \sim \beta$，则

$$\lim_{x}\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim_{x}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}\right)=0,$$

即，$\alpha-\beta=o(\beta)$；

$\Leftarrow$：$\alpha=\beta+o(\beta)$，则

$$\lim_{x}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x}\frac{\beta+o(\beta)}{\beta}=1,$$

即：$\alpha \sim \beta$.

定理2 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim\limits_{x} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则

$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x} \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

证

$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x} \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\beta'} \frac{\beta'}{\beta} \right) = \lim_{x} \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

此定理又称为等价无穷小的替换准则.

例16　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

例17　求 $\lim\limits_{x}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $y=e^x-1, x=\ln(1+y), x\to 0\Rightarrow y\to 0,$

则，
$$\lim_{x}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

由此得到，当$x\to 0$时，$e^x-1\sim x.$

等价无穷小的基本性质：设α, β, γ是无穷小，

(1)自身性： $\alpha \sim \alpha$;

(2)对称性：若$\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$;

(3)传递性：若$\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则$\alpha \sim \gamma$.

由此得到当$x \to 0$时，常见的一些等价无穷小：

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x$$

$$\sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x).$$