

用定积分求平面曲线弧长公式教学设计与实践

罗永超,傅文德

(凯里学院数学与计算机科学系, 贵州 凯里 556000)

[摘要] 分析用定积分求平面曲线弧长公式教学中存在的问题和难点,根据学生学习中容易发生知识负迁移的错误,创设情境,让学生经历问题探索的过程,培养学生言必有据的良好思维品质,进而对当前高等数学的课堂教学进行总结与反思。

[关键词] 定积分;曲线弧长;可求长

[中图分类号] G642.41;O441 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1002-6991(2006)06-0010-02

1 问题的背景

用定积分求平面曲线弧长是数学分析的难点之一,对学生而言,至少有以下两个问题需要解决。

第一,弧长定义为什么还需要有一个“可求长”的限制,难道闭区间 $[a, b]$ 上的弧长还有不可求长的情形?

第二,求弧长公式的定理,为什么要从曲线的参数方程开始?用极坐标方程类比平面区域面积的求法以扇形的弧长作为微元去求弧长公式不行吗?

对此,如果教师迎“难”而上,只管按文[1][2]的编排顺序:定义、定理、证明…按部就班地照本宣科而不顾学生的感受进行教学的话,将导致学生学完本单元后,充其量是只知其然而不知其所以然。为此,我们在教学中因势利导,设法让学生有一个探索的过程,使学生知其所以然。

2 创设情境,提出问题

在给出弧长定义之后,复习极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 所表示的曲线及二射线 $\theta = \alpha$ 及 $\theta = \beta$ 及围成区域的面积的求法,提出问题:

平面曲线的弧长能否类比平面区域的面积,以“扇形”为“微元”先求出极坐标方程的弧长,而扇形弧长 $s = \rho\theta$ 公式简捷易求,请大家讨论。

3 学生讨论,探究问题

受面积求法的影响,绝大多数同学认为这是可能的,于是积极讨论,探究问题,并有以下的推导:

如图1所示的曲线为

$L: \rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta,$

设弧长微元是夹角为 $d\theta$ 的扇形弧长,

$ds = \rho(\theta)d\theta,$

那么,曲线L的弧长公式应为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta) d\theta. \quad (1)$$

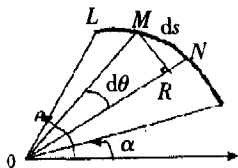


图1

学生得到(1)式后都发现这是一个错误的结果。

这时,我们不失时机地指出:是我们推导有问题还是

方法本身有问题,请继续思考。

4 深入探讨,循循善诱

在以上的过程中,学生也许还不知道问题出在哪里,这时引入弧长教学的条件又尚未成熟,我们还须进一步引导学生思考,深入探究。

既然是我们的推导没有问题,那么问题可能出在微元上。图1所示,若以 $\sqrt{MR^2 + RN^2}$ 近似地代替精确程度是否更高,也许这样能得到正确的结果。

先让学生在直角坐标系下探究问题。

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导数,则曲线 $y = f(x)$ 相应于 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x + dx]$ 的一段弧的长度可用该曲线上点 $(x, f(x))$ 到点 $(x + dx, f(x + dx))$ 的距离来代替,此即弧微分 ds (如图2)。在此假设之下,同学们继续探究,得到

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (2)$$

因此,曲线 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的弧长为

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3)$$

然后鼓励同学们将其结果化为参数方程,得到当曲线L的方程为参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

给出时,弧微分是

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

此时弧长公式是

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (4)$$

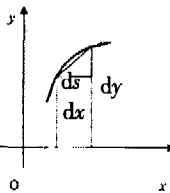


图2

类似地转化为极坐标方程的弧长的求法,得到当曲线由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 给出时,由极坐标与直角坐标的关系

$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, 并将此关系看作曲线以 θ 为参数的参数方

程,从而有

$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \theta - \rho \cos \theta' \\ y' = \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta' \end{cases}$$

这时

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = \sqrt{(\rho' \cos \theta - \rho \cos \theta')^2 + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta')^2} d\theta = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta,$$

相应的弧长公式是

$$s = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta. \quad (5)$$

这一下得来全不费功夫,想不到顺着我们的思路求弧长得到了比教材更为简便的方法.

如果在 $[a, b]$ 上两条连续的可求长曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$, 设它们的长分别是 L_f 与 L_φ , 当 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 很接近时, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

它们的长 L_f 与 L_φ 与是否也很接近?

学生很快就给以肯定的回答. 教师鼓励学生证明自己的结论, 学生一下子无法证明(因为这根本不可能).

教师出示反例.^[3]

例如, 在 $[0, 1]$ 上, 设 $f(x)=0$, 则 $L_f=1$. 又以区间 $[0, 1]$ 为斜边作等腰直角三角形(如图 3). 设折线函数是 $y=\varphi_1(x)$, 其长 $L_{\varphi_1} = \sqrt{2}$.

将区间 $[0, 1]$ 二等分, 在每个区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上,

同样以它们为斜边作等腰直角三角形, 设折线函数是 $y=\varphi_2(x)$, 其长 $L_{\varphi_2} = 2^2 \frac{\sqrt{2}}{2^2} = \sqrt{2}$.

再将区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2}, 1]$ 都二等分, 同法继续下去, 一直作到第 n

次. 设折线函数 $y=\varphi_n(x)$, 其长 $L_{\varphi_n} =$

$2^n \frac{\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2}$, 而折线函数 $y=\varphi_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值是 $\frac{1}{2^n}$. 于是, 函数 $\varphi_n(x)$ 能够任意接近于函数 $f(x)$, 即 $\forall \varepsilon > 0$,

当 n 充分大时, $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow |f(x) - \varphi_n(x)| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. 但是, 它们的长 1 与 $\sqrt{2}$ 都不能很接近, 即

$$|L_f - L_{\varphi_n}| = \sqrt{2} - 1 > \varepsilon_0 \quad (\text{取 } 0 < \varepsilon_0 < \sqrt{2} - 1).$$

引导学生思考(2)式到(3)式的推导依据.

但还不够, 教师继续提问:

闭区间 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 是否一定可以求长?

这下学生不敢直接回答教师的问题, 这说明学生在积极思考. 教师不妨再讲授例题.^{[3]250}

在坐标平面上取点列:

$$A_1(1, 0), A_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), A_3(\frac{1}{3}, 0), A_4(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \dots,$$

$A_{2k-1}(\frac{1}{2k-1}, 0), A_{2k}(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}), \dots$, 依次用线段连接上述各点, 有线段列(如图 4):

$$A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \dots, A_n A_{n+1}, \dots$$

和原点 $(0, 0)$, 构成 $[0, 1]$ 上的连续曲线 C . 讨论曲线 C 的内接折线列:

$$A_1 A_2 A_3 0, A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 0, A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 0, \dots$$

设内接折线列的长是数列 $\{L_n\}$, 显然

$$L_1 > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$L_2 > 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2},$$

$$L_3 > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

.....

$$L_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}.$$

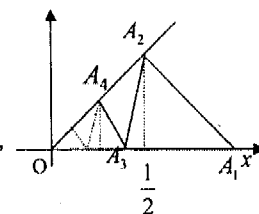


图 4

已知数列 $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\}$ 发散, 则 $\lim L_n = +\infty$, 即 $[0, 1]$ 上的连续曲线 C 是不可求长的.

至此, 用定积分求平面曲线弧长已水到渠成. 这样处理, 不仅克服了学生的心理障碍, 而且让学生知其然更知其所以然. 至于求弧长教学中的每一个具体的知识点, 这对大学数学专业的学生而言已不再是什么困难的问题.

5 总结与反思

在班级教学中, 对每位学生而言, 没有十全十美的教学方法, 本文也不例外, 对此, 我们愿意与同仁商榷.

(1) 教无定法. 对此, 本文作了一定的探索. 我们着眼于思维方法的教学, 并注意到了学生的学习感受. 我们必须教会学生勇于探索未知领域, 从失败中获得成功.

(2) 学生再一次地明白, 学习务必防止知识的负迁移. 学生出现知识迁移上的错误, 主要是缺乏“言必有据”的严谨思维品质.

(3) 师范院校的数学课堂教学模式更值得我们永远认真探索, 因为它不但影响着学生对知识的掌握, 更重要的是它启迪学生未来的教学.

(4) 教师比学生“高明”之处, 不应只是知识量的体现, 而应该是如何应用广博的知识优化课堂教学, 使学生学得更好, 更乐于学习. 同时, 教师的教学方法应灵活多变, 不墨守成规, 正因为如此我们要声明本文不提倡每次课都要将学生“置于死地而后生”.

(5) 这种探究式的课堂教学对学生发展无疑是至关重要的, 但实际情况却不允许我们有更多的时间像本文那样去实施这种符合学生认识事物规律的教学模式, 但我们认为, 只要有可能, 我们都会实施探究式的教学模式, 哪怕在教学进度上做出一点牺牲也是值得的.

参考文献:

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [2] 刘玉琏. 数学分析讲义: 上册[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 384-388.
- [3] 刘玉琏. 数学分析讲义学习指导书: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.

[责任编辑: 潘志清]